Olimpiada de matematică – etapa pe sector
21 februarie 2004

SOLUŢII ŞI BAREM DE CORECTARE
Clasa a X-a

Subiectul I

a. 2 p. Presupunem că există *f*. Atunci $f \circ f$ este strict crescătoare. **1 p.**

Funcţia $g:[0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \{x\}$, $\forall x \in [0, 1]$ nu este strict crescătoare. Rezultă că egalitatea $f \circ f = g$ nu poate avea loc. **1 p.**

b. 5 p. $x \in [0, 2]$ condiţie de existenţă. **1 p.**

$x = 0$ si $x = 1$ soluţii. **1 p.**

Dacă $x \in (1, 2)$, $f(x) < 3$ **1 p.**

Dacă $x \in (0, 1)$, utilizând inegalitatea mediilor pentru trei numere se arată că nu are loc egalitatea. **2 p.**

Subiectul II

7 p. Scrierea inegalităţii date sub forma:

$$n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 - x_i^2} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i^2}$$ **3 p.**

Dacă $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ atunci $\frac{1}{1-x_1^2} \leq \frac{1}{1-x_2^2} \leq \ldots \leq \frac{1}{1-x_n^2}$ şi aplicarea inegalităţii lui Cebâşev. **4 p.**

Subiectul III

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k \cdot x_{k+1} \cdot x_{k+2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+2} - x_k}{x_k \cdot x_{k+1} \cdot x_{k+2}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{x_k \cdot x_{k+1}} - \frac{1}{x_{k+1} \cdot x_{k+2}} \right) = \frac{1}{x_1 \cdot x_2} - \frac{1}{x_{n+1} \cdot x_{n+2}}$$

4 p.

$a_n = \frac{99}{100} \Leftrightarrow 100 < x_{n+1} \cdot x_{n+2}$.

Primii 10 termeni ai şirului $(x_n)_{n \geq 1}$ sunt 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55.

Şirul $(x_n)_{n \geq 2}$ este strict crescător.

$x_6 \cdot x_7 > 100$; deci $n = 6$. **3 p**

Subiectul IV (7 p.)

Fie $\mathrm{A}_j(a_j)$, $1 \leq j \leq n$, $|a_j| = 1$ şi $\mathrm{D}_j = \{z \in \mathbb{C} / |z - a_j| \leq 1\}$. Dacă

$z \in \bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j \Rightarrow |z - a_j| \leq 1$,

$1 \leq j \leq n \Rightarrow |z - a_j|^2 \leq 1 \Rightarrow (z - a_j) \cdot (\overline{z} - \overline{a}_j) \leq 1 \Rightarrow |z|^2 \leq a_j \cdot \overline{z} + \overline{a}_j \cdot z$ (1)

$\mathrm{M} \in \mathrm{Int}\left(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 \ldots \mathrm{A}_n\right) \Leftrightarrow u = \sum_{j=1}^{n} \partial_j \cdot a_j$ unde $\mathrm{M}(u)$, $\partial_j > 0$, $1 \le j \le n$ şi $\sum_{j=1}^{n} \partial_j = 1$.

În particular $0 \in \mathrm{Int}\left(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 \ldots \mathrm{A}_n\right)$ deci $\exists \partial'_j > 0$ cu $\sum_{j=1}^{n} \partial'_j = 1$ a.î. $0 = \sum_{j=1}^{n} \partial'_j \cdot a_j$.

Înmulțim relația (1) cu ∂'_j şi sumăm după *j*. Atunci

$$z \in \bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \partial'_j \cdot |z|^2 \le \sum_{j=1}^{n} \partial'_j \left(a_j \bar{z} + \bar{a}_j z\right) = \bar{z} \cdot \sum_{j=1}^{n} \partial'_j \cdot a_j + z \cdot \sum_{j=1}^{n} \partial'_j \cdot \bar{a}_j = 0.$$

De aici: $|z|^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} \partial'_j = 0 \Rightarrow |z| = 0 \Rightarrow z = 0$.

Deci $\bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j = \{0\}$.